第２講　１次不等式・２次方程式

1 (1) 不等式 $2ax \leqq 6x+1$ を解け．ただし，a は定数とする．

(2) $x \geqq -6$ であるすべての x に対し，不等式 $2ax \leqq 6x+1$ が成り立つような定数 a の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

不等式について

・負の数をかけたり割ったりすると，不等号の向きが逆になる．

・割る数に「　　　」が含まれる場合は，その割る数が「　　」か「　　」か「　　」かで「　　　　　」をする．

とくに「　　」のときは x が消えてしまうことがある．x が消えたあと，

不等式が成立　→ 解は「　　　　　　　」

不等式が不成立 → 解は「　　　　　　　」

不等式が「成立する」「成り立つ」とは？

調べたいすべての値や範囲を代入した式が「　　　　　ことを言っている」ということ．２つの不等式の包含関係を確かめるためには「　　　　」が有効．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　$k>1$ とする．2次方程式 $kx^2+(1-2k)x-2=0$ の2つの解を α，β とする．2次方程式 $x^2-2(k+1)x+4k=0$ の解の1つは β であり，もう1つの解を γ とする．

(1)　β を求めよ．

(2)　$\beta-\alpha=\gamma-\beta$ が成り立つとき，k の値を求めよ．

[2]　実数 x の方程式 $x^2-(k-1)x-k^2=0$ と $x^2-2kx+k=0$　がただ1つの共通解を持つとき，k の値を求めよ．また，それぞれの k に対応する共通解を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　2次方程式の解

まずは「　　　　　」を試みる．だめなら「　　　　　」．

[2]　2次方程式の「共通解」

解が出るとき

→ それぞれの方程式から出た解を比べる，または片方の解をもう一方に代入する．

解が出ないとき

→ 共通解を「　　　　　　」．その後，代入した2式を「　　　」して解く．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [1]　x についての２次方程式 $x^2-px+\dfrac{p^2-1}{4}=0$ の２つの解を x_1，x_2 とするとき，$|x_1-x_2|$ の値を求めよ．

[2]　x についての２次方程式 $x^2+px+q=0$ が，異なる２つの解 α, β をもつとする．２次方程式 $x^2+qx+p=0$ が $\alpha(\beta-2)$，$\beta(\alpha-2)$ を２解にもつとき，p，q の値を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　２次方程式の「解と係数の関係」

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の２解を α，β とすると　$\alpha+\beta=$　　　，　　　$\alpha\beta=$

２次方程式の解の「　　」「　　」(「　　」) が絡む問題に有効.

[2]　解と係数の関係の「逆」

$\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=q$ のとき，α，β を２解にもつ２次方程式の１つは

「　　　　　　　　　」である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第2講　1次不等式・2次方程式

(1)　x についての不等式 $ax+3>2x$ の解は

$a>$ [ア] のとき　$x>\dfrac{[イ]}{[ウ]-a}$　　　$a<$ [ア] のとき　$x<\dfrac{[イ]}{[ウ]-a}$

$a=$ [ア] のとき　[エ] である．

[エ] については　①：すべての実数　②：解なし　から選べ．

(2)　異なる2つの2次方程式 $x^2+ax+b=0$ ……①　$x^2+bx+a=0$ ……②　がただ1つの共通の解をもつとき，その共通解は [オ] である．またこのとき，共通でない解の和は [カキ] である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　１次不等式・２次方程式

1　(1)　不等式 $2ax \leqq 6x+1$ を解け．ただし，a は定数とする．
(2)　$x \geqq -6$ であるすべての x に対し，不等式 $2ax \leqq 6x+1$ が成り立つような定数 a の範囲を求めよ．

(1)　$2ax \leqq 6x+1$　より　$(2a-6)x \leqq 1$

$2a-6>0$　つまり　$a>3$ のとき　$x \leqq \dfrac{1}{2a-6}$

$2a-6=0$　つまり　$a=3$ のとき　$0 \cdot x \leqq 1$　　よって　すべての実数 x で成り立つ．

$2a-6<0$　つまり　$a<3$ のとき　$x \geqq \dfrac{1}{2a-6}$

以上より

$a>3$ のとき　$x \leqq \dfrac{1}{2a-6}$　　$a=3$ のとき　すべての実数　　$a<3$ のとき　$x \geqq \dfrac{1}{2a-6}$

(2)　$2ax \leqq 6x+1$　……①

$a>3$ のとき　①の解は　$x \leqq \dfrac{1}{2a-6}$

よって　$x \geqq -6$ の範囲に，①が成り立たない x が存在する．

$a=3$ のとき　①の解は　すべての実数

よって　$x \geqq -6$ の範囲のすべての x で①は成り立つ．

$a<3$ のとき　①の解は　$x \geqq \dfrac{1}{2a-6}$

これが $x \geqq -6$ の範囲のすべての x で成り立つのは　$\dfrac{1}{2a-6} \leqq -6$　のとき．

$a<3$ より　$1 \geqq -6(2a-6)$　　よって　$a \geqq \dfrac{35}{12}$

$a<3$ より　$\dfrac{35}{12} \leqq a < 3$

以上より，求める定数 a の範囲は　**$\dfrac{35}{12} \leqq a \leqq 3$**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　$k>1$ とする．2次方程式 $kx^2+(1-2k)x-2=0$ の2つの解を α，β とする．2次方程式 $x^2-2(k+1)x+4k=0$ の解の1つは β であり，もう1つの解を γ とする．

(1)　β を求めよ．

(2)　$\beta-\alpha=\gamma-\beta$ が成り立つとき，k の値を求めよ．

(1)　$kx^2+(1-2k)x-2=0$　より　$(kx+1)(x-2)=0$

$k>1$ より　$x=-\dfrac{1}{k}$，2　　これらが α，β

$x^2-2(k+1)x+4k=0$　より　$(x-2k)(x-2)=0$

よって　$x=2k$，2　　これらが　β，γ

よって　$\boldsymbol{\beta=2}$

(2)　(1)より　$\alpha=-\dfrac{1}{k}$，$\gamma=2k$

$\beta-\alpha=\gamma-\beta$　より　$\alpha+\gamma=2\beta$　　よって　$-\dfrac{1}{k}+2k=4$

$2k^2-4k-1=0$　　$k>1$ より　$\boldsymbol{k=\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}}$

2 [2]　実数 x の方程式 $x^2-(k-1)x-k^2=0$ と $x^2-2kx+k=0$ がただ1つの共通解を持つとき，k の値を求めよ．また，それぞれの k に対応する共通解を求めよ．

$x^2-(k-1)x-k^2=0$　……①　　$x^2-2kx+k=0$　……②

①と②が共通解 α をもつとき

$\alpha^2-(k-1)\alpha-k^2=0$　……③　　$\alpha^2-2k\alpha+k=0$　……④

③−④より

$(k+1)\alpha-k^2-k=0$　　$(k+1)\alpha-k(k+1)=0$　　$(k+1)(\alpha-k)=0$

よって　$k=-1$，$\alpha=k$

$k=-1$ のとき　①，②はともに $x^2+2x-1=0$　となる．

この2次方程式の判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=1^2-1\cdot(-1)=2>0$

よって①と②は共通な実数解を2つもち，不適

$\alpha=k$ のとき　③より　$k^2-(k-1)k-k^2=0$　　$(k-1)k=0$　　よって　$k=0$，1

$k=0$ のとき　①より　$x^2+x=0$　　②より　$x^2=0$

よって①と②は共通解 $x=0$ をただ1つもつ

$k=1$ のとき　①より　$x^2-1=0$　　②より　$x^2-2x+1=0$

よって①と②は共通解 $x=1$ をただ1つもつ．

以上より　**$k=0$ のとき　共通解　$x=0$　　$k=1$ のとき　共通解　$x=1$**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

> **3** ［1］ x についての２次方程式 $x^2-px+\dfrac{p^2-1}{4}=0$ の２つの解を x_1, x_2 とするとき，$|x_1-x_2|$ の値を求めよ．

$x^2-px+\dfrac{p^2-1}{4}=0$　より　$4x^2-4px+(p+1)(p-1)=0$

$(2x-p-1)(2x-p+1)=0$　　よって　$x=\dfrac{p+1}{2}$，$\dfrac{p-1}{2}$　　これらが x_1，x_2

したがって　$|x_1-x_2|=\left|\dfrac{p+1}{2}-\dfrac{p-1}{2}\right|=|1|=\mathbf{1}$

（別解）　$x^2-px+\dfrac{p^2-1}{4}=0$ の２解が x_1，x_2 のとき，解と係数の関係から

$x_1+x_2=p$，$x_1x_2=\dfrac{p^2-1}{4}$

このとき　$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=p^2-4\cdot\dfrac{p^2-1}{4}=1$

よって　$x_1-x_2=\pm1$　　したがって　$|x_1-x_2|=1$

> **3** ［2］ x についての２次方程式 $x^2+px+q=0$ が，異なる２つの解 α, β をもつとする．２次方程式 $x^2+qx+p=0$ が $\alpha(\beta-2)$，$\beta(\alpha-2)$ を２解にもつとき，p，q の値を求めよ．

$x^2+px+q=0$ の２解が α，β より，解と係数の関係から

$\alpha+\beta=-p$，　$\alpha\beta=q$

このとき

$\alpha(\beta-2)+\beta(\alpha-2)=2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)=2q-2(-p)=2p+2q$

$\alpha(\beta-2)\cdot\beta(\alpha-2)=\alpha\beta(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta\{\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4\}$

$=q(q+2p+4)=q^2+2pq+4q$

$\alpha(\beta-2)$，$\beta(\alpha-2)$ が $x^2+qx+p=0$ の２解であることより，

$q=-\{\alpha(\beta-2)+\beta(\alpha-2)\}=-2p-2q$　……①

$p=\alpha(\beta-2)\cdot\beta(\alpha-2)=q^2+2pq+4q$　……②

①より　$p=-\dfrac{3}{2}q$　　これを②に代入して　$-\dfrac{3}{2}q=q^2+2\left(-\dfrac{3}{2}q\right)q+4q$

$4q^2-11q=0$　　$q(4q-11)=0$　　よって　$q=0$，$\dfrac{11}{4}$

$q=0$ のとき　$p=0$

このとき　$x^2+px+q=0$　……③　より　$x^2=0$　　$x=0$

よって　$\alpha=\beta=0$ となり，α，β が異なることに反し不適

$q=\dfrac{11}{4}$ のとき　$p=-\dfrac{33}{8}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

このとき③より　$x^2-\frac{33}{8}x+\frac{11}{4}=0$　この判別式を D とすると

$D=\left(-\frac{33}{8}\right)^2-4\cdot1\cdot\frac{11}{4}=\frac{1089}{64}-\frac{704}{64}>0$ より　$\alpha,\ \beta$ は異なる２実数解である．

以上より　$\boldsymbol{p=-\frac{33}{8},\ q=\frac{11}{4}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第2講　1次不等式・2次方程式

(1)　x についての不等式 $ax+3>2x$ の解は

$a>$ **ア** のとき　$x>\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}-a}$　　$a<$ **ア** のとき　$x<\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}-a}$

$a=$ **ア** のとき **エ** である．

エ については　①：すべての実数　②：解なし　から選べ．

(2)　異なる2つの2次方程式 $x^2+ax+b=0$ ……①　$x^2+bx+a=0$ ……②　がただ1つの共通の解をもつとき，その共通解は **オ** である．またこのとき，共通でない解の和は **カキ** である．

解答例

(1)　$ax+3>2x$　より　$(a-2)x>-3$　……①

$a>2$ のとき　①より　$x>\dfrac{3}{2-a}$　　$a<2$ のとき　①より　$x<\dfrac{3}{2-a}$

$a=2$ のとき　①は　$0\cdot x>-3$　つまり　$0>-3$　となり

x がどのような実数でも成立する．

よって求める解は

$a>\mathbf{2}$ のとき　$x>\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}-a}$　　$a<2$ のとき　$x<\dfrac{3}{2-a}$

$a=2$ のとき　すべての実数（①）

(2)　①と②の共通解を α とすると

$\alpha^2+a\alpha+b=0$　……③　$\alpha^2+b\alpha+a=0$　……④

③－④より　$(a-b)\alpha-(a-b)=0$　　$(a-b)(\alpha-1)=0$

よって　$a=b$　または　$\alpha=1$

$a=b$ のとき　方程式①と②は一致し不適．

$\alpha=1$ のとき　③，④から　$1+a+b=0$　つまり　$b=-a-1$

このとき　①より　$x^2+ax-a-1=0$　$(x-1)(x+a+1)=0$　$x=1,\ -a-1$

②より　$x^2+(-a-1)x+a=0$　$(x-1)(x-a)=0$　$x=1,\ a$

よって　$-a-1\neq a$ ならば①と②は確かにただ1つの共通解 $x=\mathbf{1}$ をもつ．

また，共通でない解の和は　$(-a-1)+a=\mathbf{-1}$　である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。